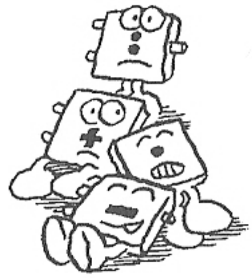
Grundwissen • Klasse 6

erstellt von A. Bönning

Zahlenmengen



$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; \ldots\}$ Die Menge der natürlichen Zahlen.

$\mathbb{Z} = \{\ldots -3; -2; -1; 0; +1; +2; +3; \ldots\}$ Die Menge der ganzen Zahlen.

$\mathbb{Q}_0^+$ Die Menge der positiven rationalen Zahlen mit Null.

Addition und Subtraktion in $\mathbb{Z}$

Auflösen von Klammern

$+(+) \Rightarrow +$

$+(-) \Rightarrow -$

$-(+) \Rightarrow -$

$-(-) \Rightarrow +$

Zwei Zahlen, deren Zahlenpfeile gleich lang sind, aber in entgegengesetzte Richtung zeigen, nennt man Zahl und **Gegenzahl** (z. B. + 4 und – 4). Die Maßzahl der Länge der beiden Zahlenpfeile ist der **Betrag** der Zahlen.

Man schreibt: $|+4| = |-4| = 4$

Addition mit gleichen Vorzeichen	Addition mit verschiedenen Vorzeichen
Addiere die Beträge der Zahlen und füge dem Ergebnis das gemeinsame Vorzeichen hinzu.	Subtrahiere den kleineren vom größeren Betrag und setze das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag.
Beispiele	
① $(+8) + (+10) = +18$	① $(+12) + (-17) = -5$
② $(-13) + (-9) = -22$	② $(-3) + (+11) = +8$
Subtrahiere eine Zahl, indem du die Gegenzahl addierst!	

Rechnen in $\mathbb{Q}_0^+$

Erweitere und kürze **nie** mit 0!

$\frac{3}{8}$ ← Zähler, ← Bruchstrich, ← Nenner

Erweitern:
Zähler und Nenner werden mit der gleichen Zahl multipliziert.

Kürzen:
Zähler und Nenner werden durch die gleiche Zahl dividiert.

Rechnen in $\mathbb{Q}_0^+$

	Brüche	Dezimalbrüche
Addition und Subtraktion	Erweitere die Brüche zuerst so, dass sie den gleichen Nenner haben. Addiere bzw. subtrahiere danach die Zähler. Der Nenner ändert sich nicht.	Bringe die Dezimalbrüche durch Anhängen von Endnullen auf gleich viele Dezimalen. Addiere bzw. subtrahiere danach die einzelnen Ziffern stellenweise.
Beispiele	① $\frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$ ② $\frac{4}{5} - \frac{3}{8} = \frac{32}{40} - \frac{15}{40} = \frac{17}{40}$	① E zh E zh E zh 4,85 + 3,12 = 7,97 ② ZE zht E zht ZE zht 12,039 – 1,500 = 10,539
Multiplikation	Multipliziere den Zähler mit dem Zähler und den Nenner mit dem Nenner. Wandle gemischte Zahlen vorher in unechte Brüche um. z. B. $3\frac{4}{9} = \frac{3 \cdot 9 + 4}{9} = \frac{31}{9}$	Multipliziere die beiden Dezimalbrüche zuerst ohne Komma. Setze danach das Komma so, dass das Ergebnis so viele Stellen nach dem Komma hat, wie beide Faktoren zusammen.
Beispiele	③ $\frac{5}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{9 \cdot 3} = \frac{10}{27}$ ④ $2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 7} = \frac{6}{7}$	③ $3{,}\underset{1}{\underline{8}} \cdot 2{,}\underset{1}{\underline{1}} = 7{,}\underset{2}{\underline{98}}$ ④ $1{,}\underset{2}{\underline{72}} \cdot 6{,}\underset{1}{\underline{4}} = 11{,}\underset{3}{\underline{008}}$
Division	Dividiere einen Bruch durch einen zweiten Bruch, indem du den ersten mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multiplizierst.	Verschiebe das Komma bei beiden Zahlen um so viele Stellen nach rechts, dass der Divisor eine ganze Zahl ist. Beim Überschreiten des Kommas wird im Ergebnis das Komma gesetzt.
Beispiele	⑤ $\frac{4}{7} : \frac{5}{6} = \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{5} = \frac{24}{35}$ ⑥ $\frac{4}{7} : 3 = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{21}$	⑤ 2,41 : 0,5 = 24,1 : 5 = 4,82 ⑥ 6,2 : 0,08 = 620 : 8 = 77,5

erstellt von A. Bönning

Rechnen in $\mathbb{Q}_0^+$

	Brüche ⇨ Dezimalbrüche	Dezimalbrüche ⇨ Brüche
Umwandeln	Ersetze den Bruchstrich durch ein Divisionszeichen und dividiere den Zähler durch den Nenner. Es entsteht dabei ein endlicher Dezimalbruch ① oder ein periodischer Dezimalbruch ②.	**endliche Dezimalbrüche:** Schreibe in den Zähler die Zahl ohne Komma und in den Nenner die entsprechende Stufenzahl. **periodische Dezimalbrüche:** Schreibe in den Zähler die Periode und in den Nenner so viele Neunen, wie die Periode Stellen hat. *
Beispiele	① $\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375$ ② $\frac{5}{11} = 5 : 11 = 0{,}4545\ldots = 0{,}\overline{45}$	① $3{,}42 = \frac{342}{100} = \frac{81}{25}$ ② $0{,}\overline{102} = \frac{102}{999}$

* Diese Regel gilt nur, wenn die Periode sofort nach dem Komma beginnt!

Abrunden:
Die zu rundende Ziffer bleibt unverändert, wenn eine 0, 1, 2, 3 oder 4 folgt.

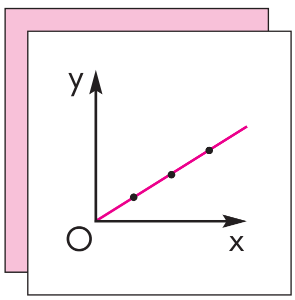
Aufrunden:
Die zu rundende Ziffer wird um 1 erhöht, wenn eine 5, 6, 7, 8 oder 9 folgt.

Direkte Proportionalität

Eine Zuordnung $x \longrightarrow y$ nennt man **direkt proportional**, wenn gilt: Vervielfacht sich die Größe x um das n-fache, so vervielfacht sich auch die Größe y um das n-fache (man schreibt: $x \sim y$).

Eigenschaften:

- Alle Zahlenpaare $(x|y)$ sind **quotientengleich**.
- Der konstante Quotient $k = \frac{y}{x}$ heißt **Proportionalitätskonstante**.
- Alle Punkte liegen auf einer **Halbgeraden**, die im Ursprung beginnt.



erstellt von A. Bönning

Prozentrechnung

$\frac{1}{100} = 1\%$

Von **25** Kindern einer Schulklasse können **20** schwimmen. Das sind **80%** der Klasse.

Grundwert (**GW**) — Prozentwert (**PW**) — Prozentsatz (**p**)

$$GW = \frac{PW \cdot 100}{p} \qquad PW = \frac{GW \cdot p}{100} \qquad p = \frac{PW \cdot 100}{GW}$$

Terme

- Jede Zahl, jede Variable und jede sinnvolle Verknüpfung aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen bezeichnet man als **Term** (Beispiele: $7 \cdot x + 5$; $y^2 - 5$).
- Wird die Variable eines Terms mit Werten aus der Grundmenge belegt, so erhält man **Termwerte**.
- Terme sind **äquivalent**, wenn sie bei allen Einsetzungen aus $\mathbb{G}$ die gleichen Termwerte haben.

Darstellungsarten

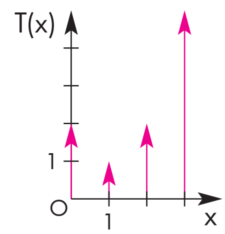
Beispiel

$T(x) = (x - 1)^2 + 1$ in $\mathbb{G} = \{0; 1; 2; 3\}$

Numerische Wertetabelle

x	0	1	2	3
$(x - 1)^2 + 1$	2	1	2	5

Grafische Wertetabelle



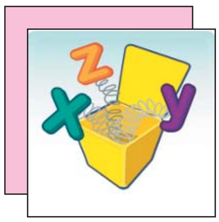
Gleichungen und Ungleichungen

- Verbindet man zwei Terme durch das Gleichheitszeichen, so erhält man eine **Gleichung**.
- Verbindet man zwei Terme durch ein Ungleichheitszeichen, so erhält man eine **Ungleichung**.
- Gleichungen bzw. Ungleichungen, die bei gleicher Grundmenge dieselbe Lösungsmenge haben, heißen **äquivalent**.

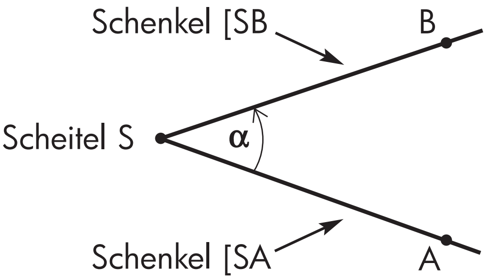
Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man ...

- ... auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert.
- ... beide Seiten mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) multipliziert oder dividiert.

Diese Umformungen einer Gleichung heißen **Äquivalenzumformungen**.

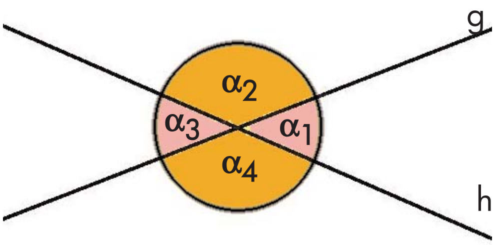


Winkel

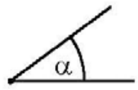
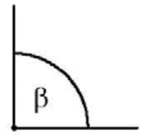
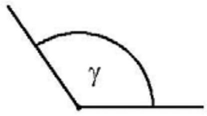
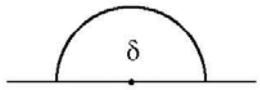
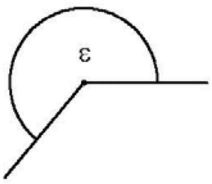
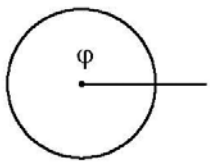


Man schreibt: $\measuredangle$ ASB

Scheitelwinkel liegen sich gegenüber und haben gleiches Maß:
$\alpha_1 = \alpha_3$; $\alpha_2 = \alpha_4$

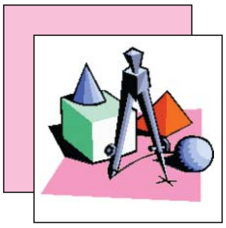


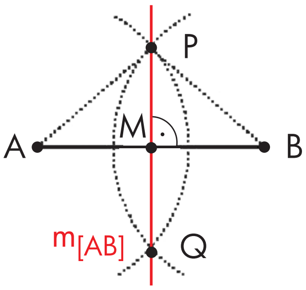
Nebenwinkel liegen nebeneinander und ergänzen sich zu 180°:
$\alpha_1 + \alpha_2 = 180°$; $\alpha_3 + \alpha_4 = 180°$

Winkelarten	spitzer Winkel $0° < \alpha < 90°$	rechter Winkel $\beta = 90°$
		
	stumpfer Winkel $90° < \gamma < 180°$	gestreckter Winkel $\delta = 180°$
		
	überstumpfer Winkel $180° < \varepsilon < 360°$	Vollwinkel $\phi = 360°$
		

Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende

Jeder Punkt auf der **Mittelsenkrechten** $m_{[AB]}$ ist von den Punkten A und B gleich weit entfernt.

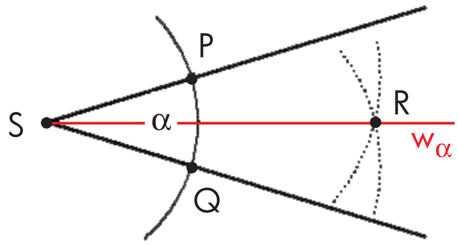




Konstruktion

- Zeichne um die beiden Punkte A und B Kreise mit dem gleichen Radius r, wobei gilt: $r > 0{,}5 \cdot \overline{AB}$
- Zeichne eine Gerade durch die beiden Schnittpunkte P und Q der Kreise.

Jeder Punkt auf der **Winkelhalbierenden** w_α hat von den Schenkeln den gleichen Abstand.

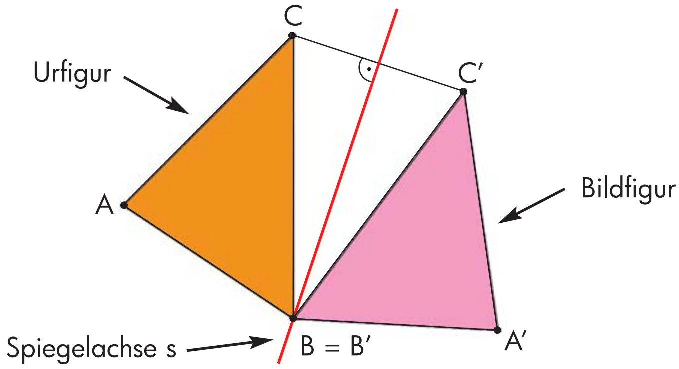


- Zeichne um den Scheitel S des Winkels einen Kreis. Dieser schneidet die beiden Schenkel in den Punkten P und Q.
- Zeichne um die Punkte P und Q je einen Kreis mit dem gleichen Radius.
- Verbinde den Schnittpunkt R der beiden Kreise mit dem Scheitel S.

Achsenspiegelung

Wird einer Urfigur durch Spiegelung an einer Geraden s genau eine Bildfigur zugeordnet, so handelt es sich bei der Abbildung um eine Achsenspiegelung.

Man schreibt: $ABC \xmapsto{s} A'B'C'$



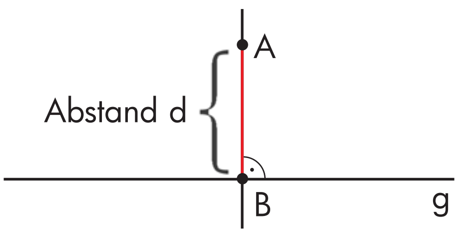
Eigenschaften

- Urfigur und Bildfigur liegen **symmetrisch** zur Spiegelachse s.
- Die Verbindungsstrecken vom Urpunkt zum Bildpunkt stehen senkrecht auf der Spiegelachse s und werden von ihr halbiert.
- Die Achsenspiegelung ist eine **Kongruenzabbildung**, d. h. Ur- und Bildfigur sind deckungsgleich.
- Die Achsenspiegelung ist längen- und winkeltreu, sowie geraden- und kreistreu.
- Die Spiegelachse s besteht nur aus Fixpunkten, d. h. aus Punkten, die auf sich selbst abgebildet werden. Sie ist eine **Fixpunktgerade**.
- Alle zur Spiegelachse senkrechten Geraden und die Spiegelachse selbst sind **Fixgeraden**, d. h. Geraden, die auf sich selbst abgebildet werden.

Abstand

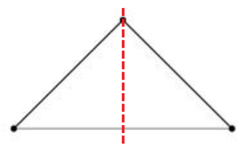
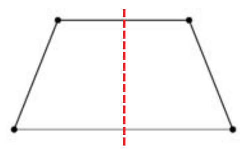
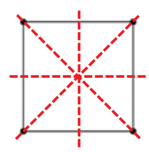
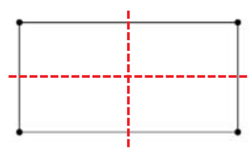
Der Abstand d ist die kürzeste Entfernung von A zu einem Punkt der Geraden g und wird auf der Senkrechten zu g durch den Punkt A gemessen. Die Gerade AB heißt **Lotgerade** oder Lot von A auf g. Der Punkt B heißt **Lotfußpunkt**.

Man schreibt: d (A; g)



Hinweis: Zwei parallele Geraden haben überall den gleichen Abstand!

achsensymmetrische Figuren

gleichschenkliges Dreieck	gleichschenkliges Trapez
	
Quadrat	Rechteck
	
Drachenviereck	Raute